Concursul interjudeţean de matematică Victor Vâlcovici

Brăila, 20 Mai 2017

Clasa a 10-a

Problema 1. Determinaţi $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}^*$ dacă $z_1^2\overline{z_2} = z_2^2\overline{z_3} = z_3^2\overline{z_1}$ şi $z_1 + z_2 + z_3 = 1$.

Problema 2. Să se rezolve ecuaţia $log_3(x^2 - 5x + 1) = x$.

Problema 3. Fie $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. Pentru fiecare $k \in \{0, 1, 2\}$ notăm cu p_k numărul de submulţimi cu trei elemente ale mulţimii $\{1, 2, 3, ..., 3n\}$ care au suma elementelor congruentă cu k modulo 3. Fie ε o rădăcină nereală de ordin 3 a unităţii.

(a) Arătaţi că dacă există $a, b, c \in \mathbb{R}$ astfel încât $a + b\varepsilon + c\varepsilon^2 = 0$, atunci $a = b = c$.
(b) Arătaţi că:

$$p_0 + p_1\varepsilon + p_2\varepsilon^2 = \sum_{1 \leq a < b < c \leq 3n} \varepsilon^{a+b+c}.$$

(c) Determinaţi numerele p_0, p_1 şi p_2.

Timp de lucru 3 ore
Fiecare problemă va fi notată cu maxim 7 puncte